



INŽENJERSKE
KONSTRUKCIJE

1. Značajke konstruktivnih sustava

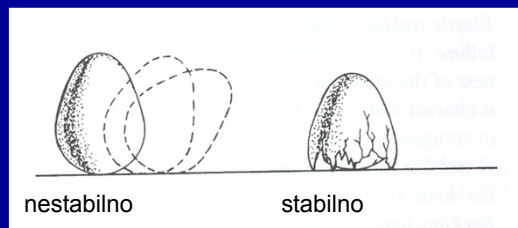
AF



(a) *Stabilnost, krutost i klasifikacija struktura*

Stabilnost

- sposobnost strukture da preuzme opterećenja uz ograničene deformacije i pomake
- granična deformacija ili pomak određuje da li je struktura stabilna ili ne ovisi o tipu strukture
- stabilnost je kvalitativni izraz, struktura je stabilna ili nestabilna - ne može biti "više stabilna" ili "manje stabilna"

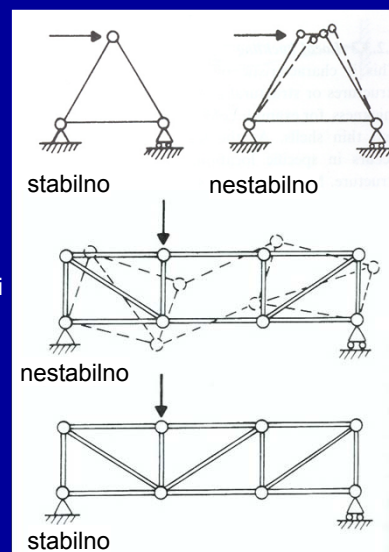


(a) *Stabilnost, krutost i klasifikacija struktura*

Razlikuju se dva tipa stabilnosti:

1. geometrijska

- sposobnost strukture da uopće preuzme opterećenja
- svojstvo geometrije strukture
- nema veze s veličinom opterećenja ili s nosivosti pojedinih konstruktivnih elemenata



(a) *Stabilnost, krutost i klasifikacija struktura*

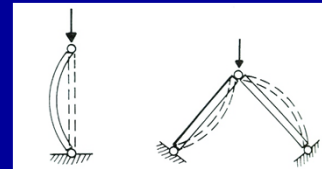
Razlikuju se dvije vrste stabilnosti:

2. elastična (ili izvijanje)

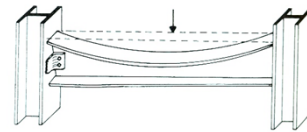
- način sloma strukture
- funkcija opterećenja i krutosti strukture i njenih dijelova
- izvijanje je karakteristično za strukture ili konstruktivne elemente pod tlačnim opterećenjem
- izvijanje je fenomen gubitka stabilnosti geometrijski stabilnih struktura, do kojeg dolazi kad opterećenje dosegne određenu "kritičnu" vrijednost – silu izvijanja



lokalno izbočavanje



izvijanje (općenito)

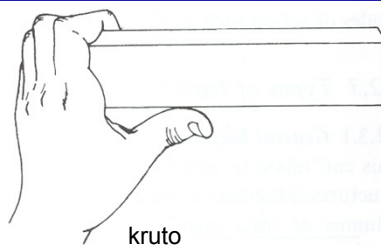


bočno izvijanje

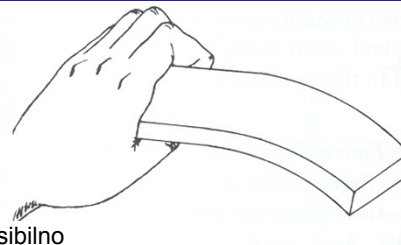
(a) *Stabilnost, krutost i klasifikacija struktura*

Krutost

- funkcija geometrije strukture i ne ovisi o veličini izmjera strukture i njenih elemenata



kruto

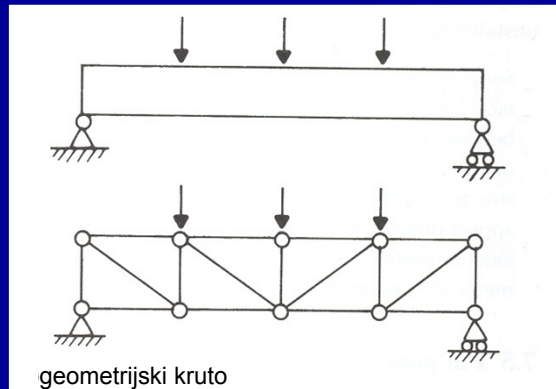


fleksibilno

(a) *Stabilnost, krutost i klasifikacija struktura*

Geometrijska krutost

- kvalitativni parametar
- označava odsutnost gibanja uslijed infinitezimalno malih sila



(a) *Stabilnost, krutost i klasifikacija struktura*

Elastična krutost

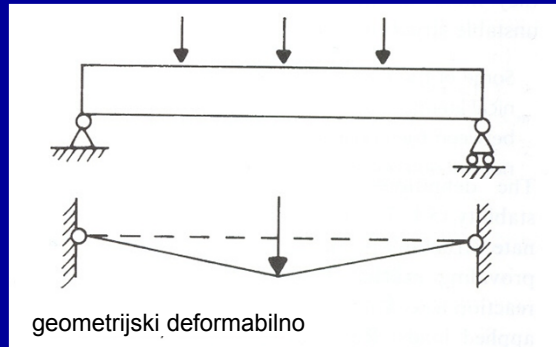
- funkcionalni odnos između sila i pomaka

Elastičnost

- kvantitativni parametar
- vezan na veličinu gibanja uslijed povećanja opterećenja

(a) *Stabilnost, krutost i klasifikacija struktura***Geometrijska deformabilnost**

- značajka strukture koja pod opterećenjem mijenja oblik ma kako malo
- *inverzni* pojam u odnosu na geometrijsku krutost, kao što je "fleksibilnost" *inverzni* pojam u odnosu na "elastičnu krutost"

(a) *Stabilnost, krutost i klasifikacija struktura*

- neka struktura općenito ima i fleksibilnost i elastičnu krutost, ali može biti ili kruta ili deformabilna

Kruta i deformabilna struktura

- **kruta struktura** preuzima opterećenja bez većih promjena oblika (geometrije) - npr. greda i rešetka
- **deformabilna struktura** ne može preuzeti opterećenje u svom osnovnom obliku (geometriji), nego se oblikom prilagođuje zadanom opterećenju
- deformacije (pomaci) su ipak unutar određenih tolerancija, tako da se takva struktura može smatrati "stabilnom"
- primjer takve strukture je uže razapeto između dva oslonca ili struktura od tkanine npr. šatora

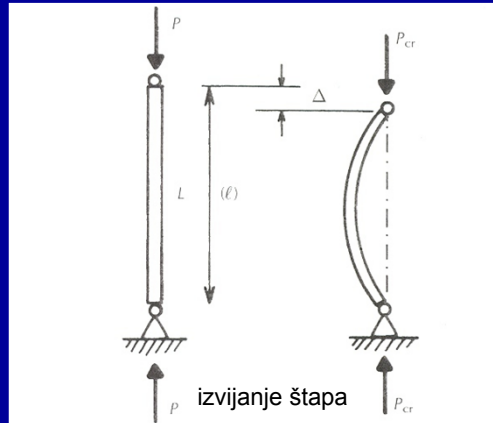
(b) *Ravninske štapne strukture*

Izvijanje tlačnih štapova

- Euler-ova kritična sila izvijanja

$$P_{cr} = \pi^2 EI / L^2$$

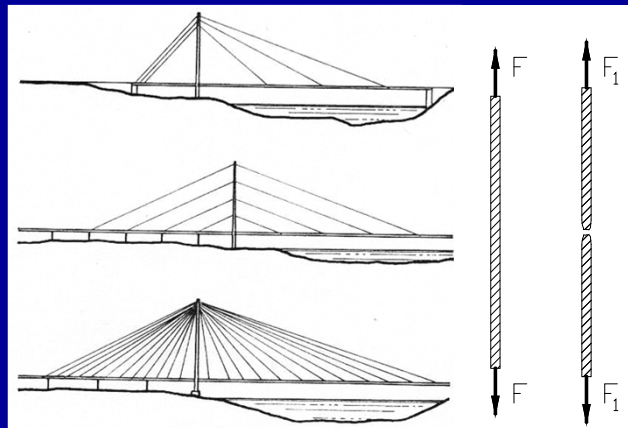
L = duljina izvijanja = udaljenost između točaka infleksije
 EI = krutost na savijanje



(b) *Ravninske štapne strukture*

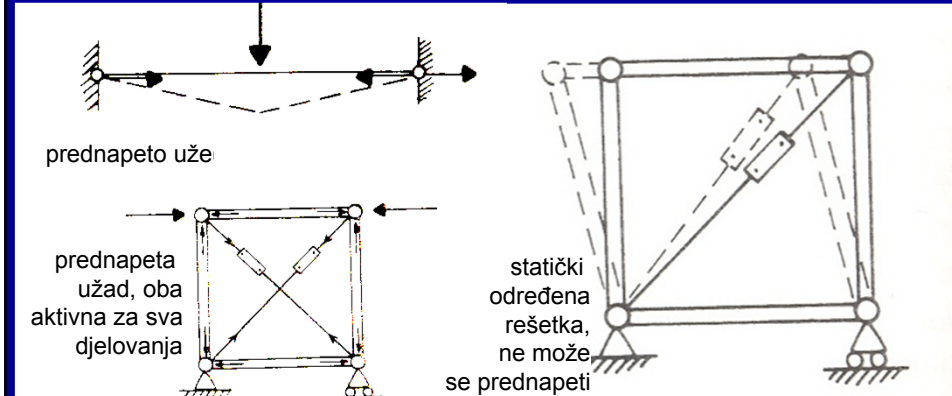
Vlačni štap - zatega

- zatega može biti i uže (kabel) zanemarive krutosti na savijanje
- oznaka "kabel" obuhvaća i zakrivljene elemente *funikularnog* oblika



(b) *Ravninske štapne strukture***Prednapinjanje**

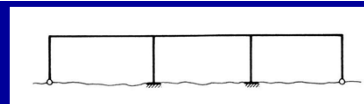
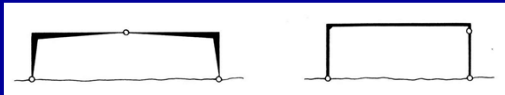
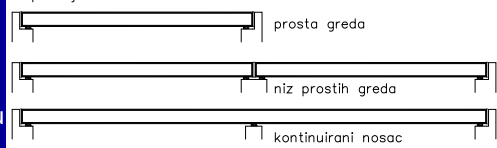
- stanje kod kojeg u strukturi postoje unutarnje sile bez vanjskog opterećenja
- rešetkaste zglobno sastavljene strukture mogu se prednapeti samo ako su statički neodređene
- geometrijski deformabilne strukture se mogu prednapeti, a najčešće se jedino prednapinjanjem mogu ostvariti pomaci unutar prihvatljivih granica

(b) *Ravninske štapne strukture***Tipovi ravninskih štapnih struktura**

- rešetke
- grede
 - slobodno oslonjene
 - upete
 - kontinuirane
- ploče
 - nose u jednom smjeru
 - nose u dva smjera
 - ploče s rebrima
- Vierendeel nosači
- ravninski okviri
 - preko jednog polja
 - preko više polja
- lagani ravninski krovni nosivi sustavi
 - pokrov
 - podrožnice
 - vjetrovni spregovi – horizontalna stabilizacija



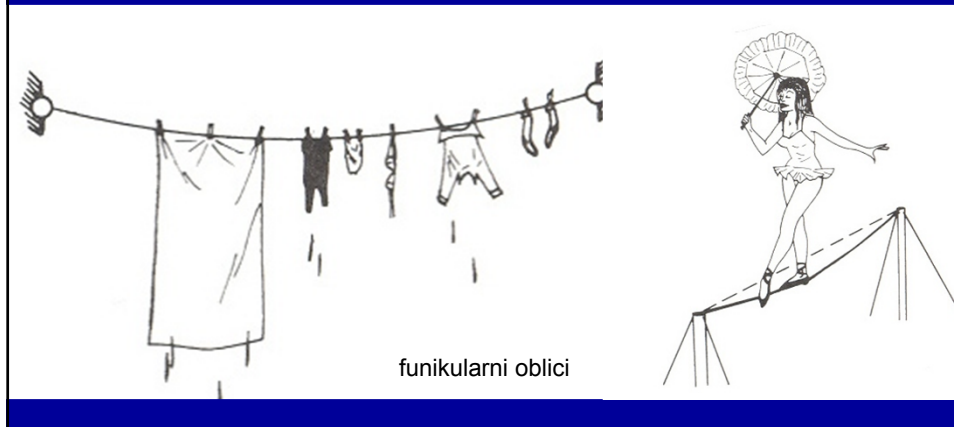
dispozicije:



(c) *Kablovi i lukovi*

Funikularni oblici

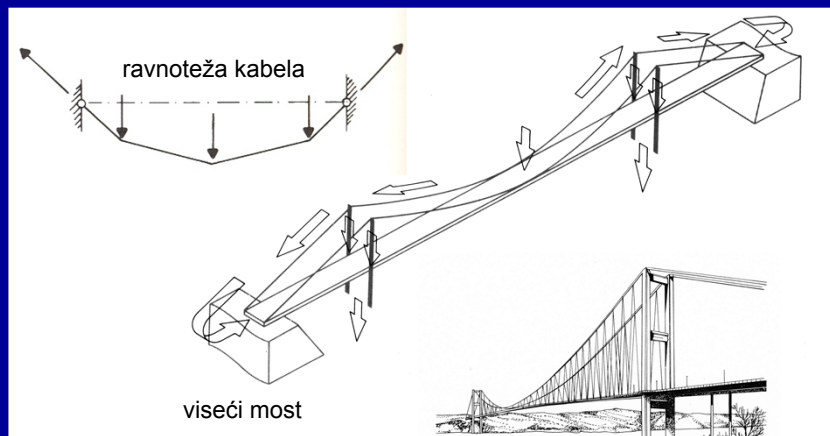
- *funikularni* oblik sile na rasponu je oblik koji poprima element bez fleksijske krutosti (uže ili lanac) pod zadanim opterećenjem, obješen preko raspona između fiksnih oslonaca
- *funikularni* oblik je isključivo funkcija opterećenja



(c) *Kablovi i lukovi*

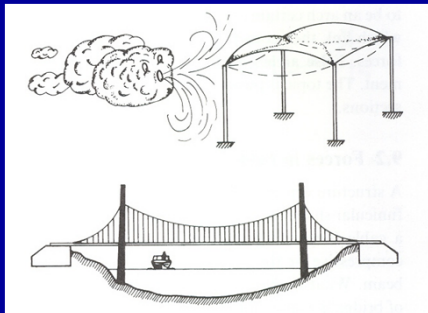
Kabel (uže, lanac)

- u čistom vlaku
- nema fleksijske krutosti pa se automatski prilagođuje zadanom opterećenju, uvijek zauzimajući *funikularni* oblik

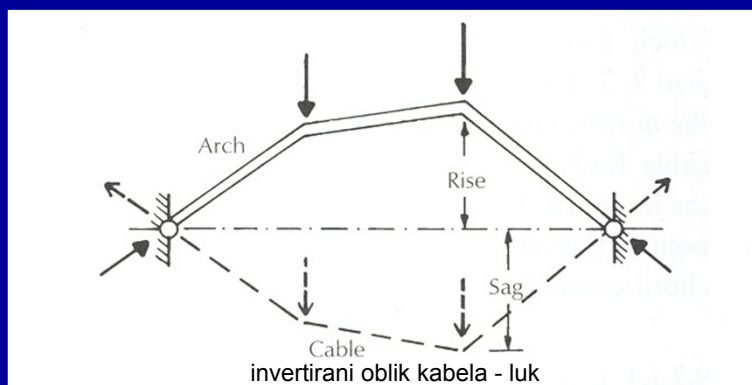


(c) *Kablovi i lukovi***Kabel (uže, lanac)**

- nestabilna struktura
- ako se opterećenje drastično promijeni, primjerice promijeni smjer, mogu nastati nedozvoljeno veliki pomaci
- ako je pak područje moguće varijacije opterećenja malo, kabel je unutar tog područja stabilna deformabilna struktura
- primjer takve strukture je viseći most - stalna težina visećeg mosta je neusporedivo veća od promjenjivih djelovanja i struktura je općenito stabilna

(c) *Kablovi i lukovi***Luk**

- ako se oblik kabla za zadano opterećenje “invertira” (zaokrene za 180°) provjes kabla postaje *strelica* luka
- novo dobiveni oblik je u čistom tlaku
- struktura koja je izvedena prema *funikularnom* obliku u tlaku zove se luk



(c) *Kablovi i lukovi*

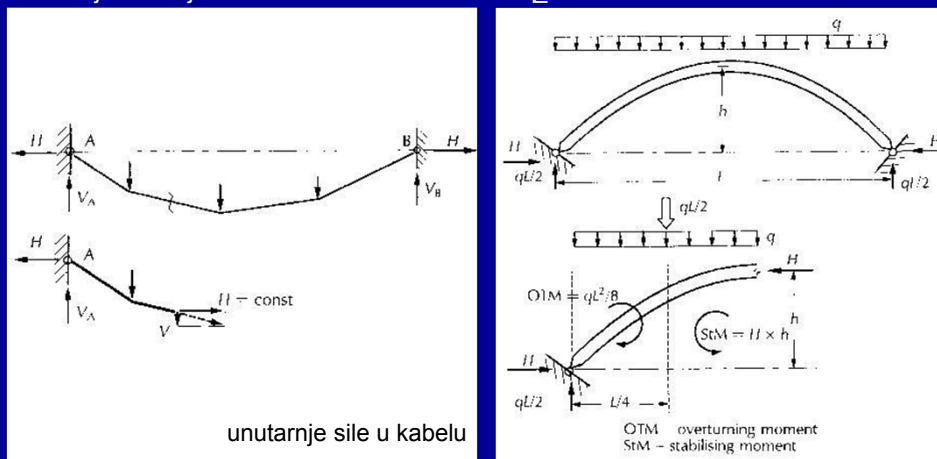
Luk

- luk mora imati fleksijsku krutost zbog izvijanja
- zato je kruta struktura nepromjenjivog oblika, koji se ne može prilagoditi promjeni opterećenja
- sukladno gornjem luk je u čistom tlaku samo za onu kombinaciju opterećenje za koje je *funikularnog* oblika
- za bilo koju drugu različitu kombinaciju opterećenja u luku nastaje kombinacija aksijalnog tlaka i savijanja
- definicija luka je strukturalna a ne geometrijska
- konstruktivna visina kabela je *provjes*, a luka *strelica*

(c) *Kablovi i lukovi*

Luk

- horizontalna komponenta unutarnjih sila na cijeloj duljini kabela i luka je za vertikalna djelovanja konstantna
- to slijedi iz uvjeta ravnoteže horizontalnih sila $\sum H = 0$:



(c) *Kablovi i lukovi***Luk**

- *funikularni* oblik i oblik momentnog dijagrama grede su funkcije opterećenja
- slijede slijedeći izrazi:

Kontinuirano opterećenje:

greda

$$M = qL^2/8$$

funikularni oblik

$$H = qL^2/8h$$

Koncentrirana sila:

greda

$$M = PL/4$$

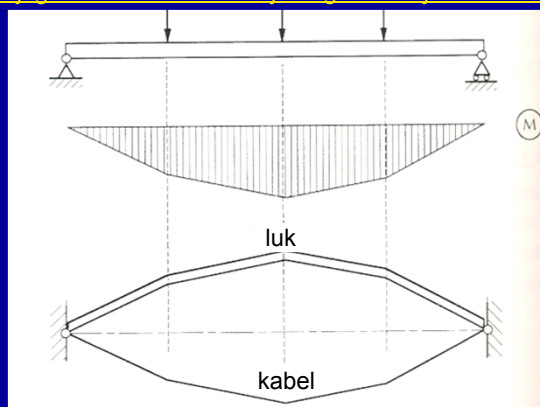
funikularni oblik

$$H = PL/4h$$

- napadni moment savijanja jednak je u oba slučaja
- stabilizirajući moment u slučaju grede je moment savijanja M , a za *funikularni* oblik $H \times h$.

(c) *Kablovi i lukovi***Luk**

- vrijedi izraz: $y(x) = M(x)/H$
gdje je
 $y(x)$ ordinata funikularnog oblika u udaljenosti x
- slijedi da je funikularni oblik za zadani raspon i za proizvoljno opterećenje oblik momentnog dijagrama slobodno oslonjene grede za jednaki raspon i opterećenje:

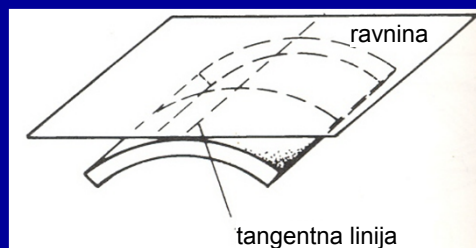


(d) *Ljuske*

- zakrivljene plohe, koje vanjska djelovanja preuzimaju membranskim djelovanjem, tlačnim, vlačnim i posmičnim naprezanjima unutar plohe, što znači da je konstruktivna visina jednaka debljini ljuske
- zakrivljenost ljuske definirana je odnosom ravnine koja tangira ljusku prema plohi ljuske

Jednostruka zakrivljenost

- ako ravnina dodiruje plohu po ravnoj liniji
- ako prerežemo plohu ravninom okomitom na liniju dodira dobit ćemo zakrivljeni poprečni presjek
- razvijene plohe - mogu se razviti od ravnih ploha



(d) *Ljuske*

Dvostruka zakrivljenost

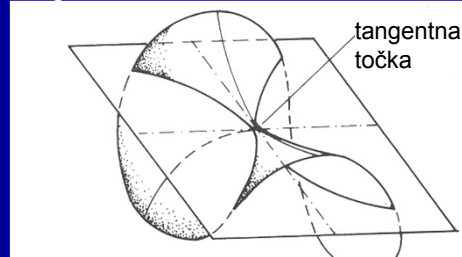
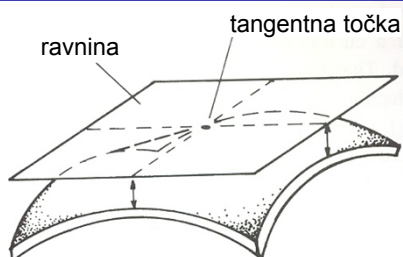
- postoje barem dvije međusobno okomite ravnine, koje prolaze dodirnom točkom, koje su okomite na tangentnu ravninu, a presjek s plohom im je krivulja
- plohe dvostruke zakrivljenosti ne mogu se razviti
- postoje dva tipa ploha dvostruke zakrivljenosti:

SINKLASTIČKE

- leži s jedne strane tangentne ravnine
- može biti "konveksna" ili "konkavna"
- ima pozitivnu Gauss-ovu zakrivljenost

ANTIKLASTIČKE

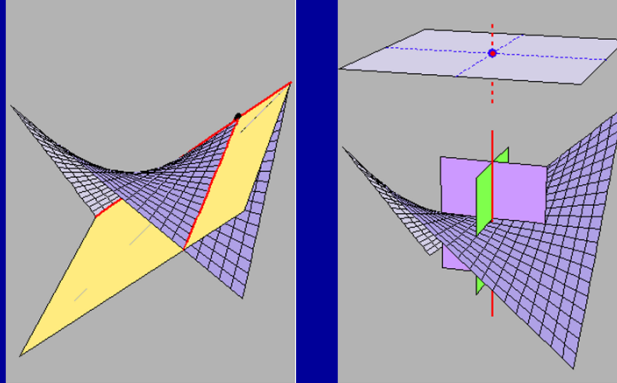
- negativna Gauss-ova zakrivljenost
- ako se ploha nalazi djelomično s jedne strane tangentne ravnine, a djelomično s druge strane u blizini dodirne točke



(d) *Ljuske*

Dvostruka zakrivljenost

- krivulje presjeka plohe s dvije ortogonalne ravnine, okomite na tangentnu ravninu na mjestu dodirne točke leže na suprotnim stranama tangentne ravnine (osim za posebne orijentacije kod kojih dvije krivulje degeneriraju u pravce – hiperbolični paraboloid) – ovakve plohe obično nazivamo “sedlaste”

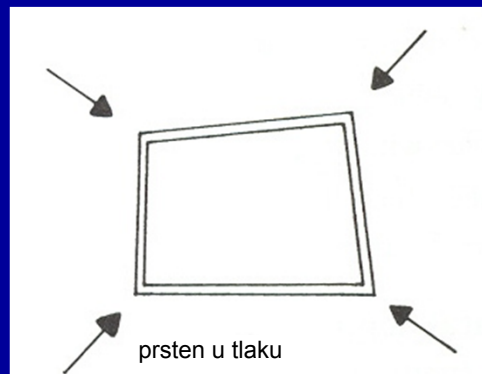
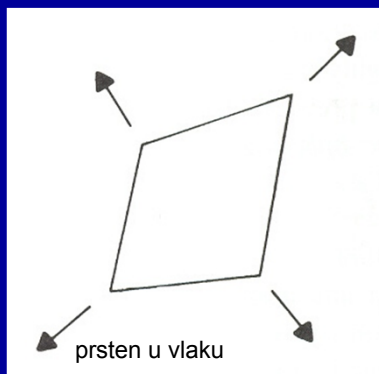


- ploha jedne ljuske može biti složena od kombinacije sinklastičnih i antiklastičnih dijelova, ali ako sadrži i ravninske dijelove, ti dijelovi obično moraju preuzeti savijanje

(d) *Ljuske*

Prsteni

- zatvorene konveksne krivulje – često se koriste kod prostornih struktura ili kao rubni elementi ili kod nekih poprečnih presjeka
- prsten je u konstruktivnom smislu posebni tip funikularnog oblika za skup uravnoteženih sila u ravnini, tako da je u čistom vlaku ili čistom tlaku



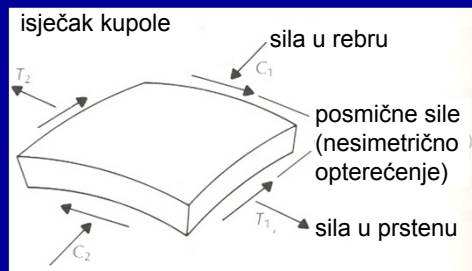
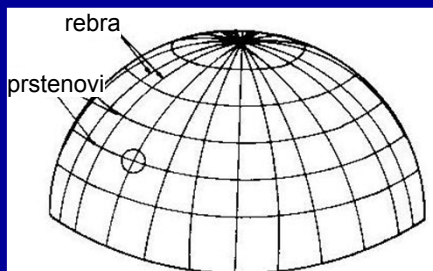
(d) *Ljuske*

Kupola

- struktura dvostruke zakrivljenosti (ljuska obično konveksne zakrivljenosti) koja prekriva prostor približno regularnog oblika (kružni, poligonalni)

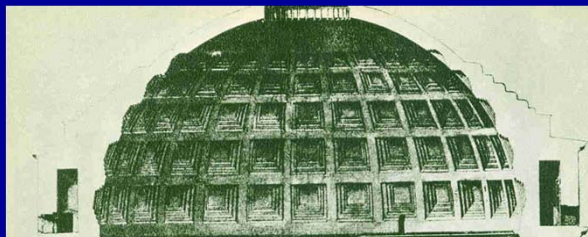
SFERNA KUPOLA

- s plohom koja je dio kugle (sfere)
- sferna kupola može preuzeti sva opterećenja membranskim djelovanjem, osim koncentriranih sila koje mogu izazvati lokalno savijanje
- za razliku od funikularnih oblika, oblik zakrivljene plohe nije funkcija opterećenja
- do lokalnog savijanja dolazi u tzv. zoni smetnje u okolini rubova, gdje uvjeti oslanjanja nisu kompatibilni s membranskim djelovanjem

(d) *Ljuske*

Kupola

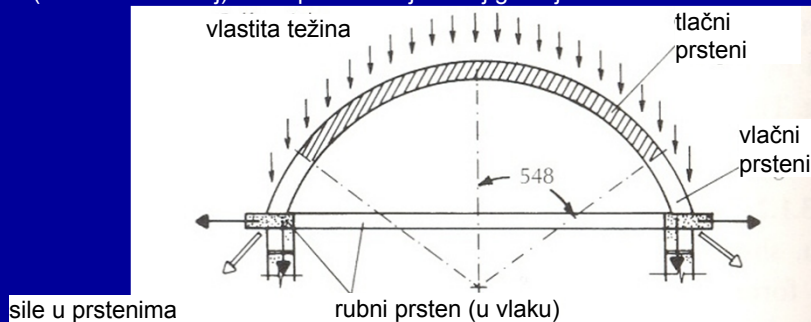
- konstruktivna visina kupole je cijela visina kupole od baze do tjemena
- odnos konstruktivne visine prema rasponu je u granicama od $\frac{1}{8}$ za plitke kupole do $\frac{1}{2}$ za visoke kupole
- uobičajeni optimalni odnosi konstruktivne visine prema rasponu iznose 0,2 - 0,25
- u sfernoj kupoli za simetrično opterećenje sile u prstenima se mijenjaju od tlačnih pri vrhu do vlačnih kod dna (osim za plitke kupole)
- vlak je uzrokovao mnoge probleme kod povijesnih kupola od kamena, koje ga nisu mogle preuzeti
- ako je oblik meridijalno položenih rebara funikularni oblik za vanjsko djelovanje, sile u prstenima nestaju, jer se puna ravnoteža ostvaruje samo rebrima



(d) *Ljuske*

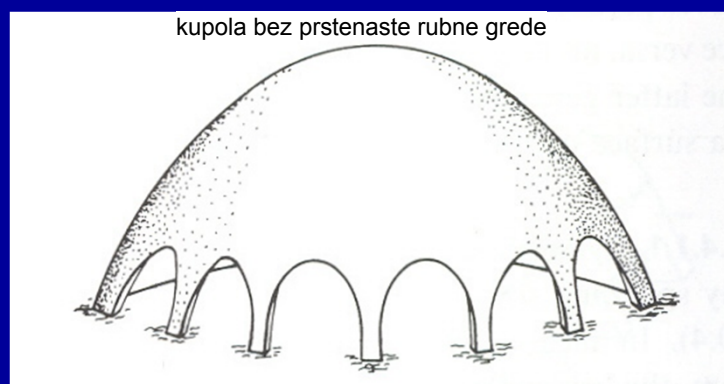
Kupola

- kupole se često oslanjaju na vertikalne zidove ili stupove
- ako se smjer pružanja oslonca razlikuje od tangente na meridijalna rebra potrebni su posebni prsteni na razini oslonaca za preuzimanje koncentracije vlačnih ili tlačnih sila – **prstenasta greda ili rubni prsten**
- prsten preuzima horizontalnu reakciju, koja nastaje od razlike smjera tangente na plohu kupole i vertikale
- ako je vertikalni oslonac u odnosu na tangentu zaokrenut prema unutrašnjosti kupole (standardni slučaj) sila u prstenastoj rubnoj gredi je vlačna

(d) *Ljuske*

Kupola

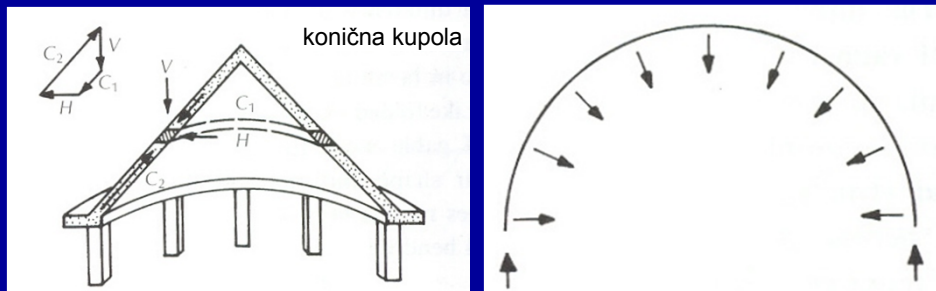
- prstenasta rubna greda nije potrebna ako su stupovi ili zidovi nagnuti u smjeru tangente meridijalnih rebara



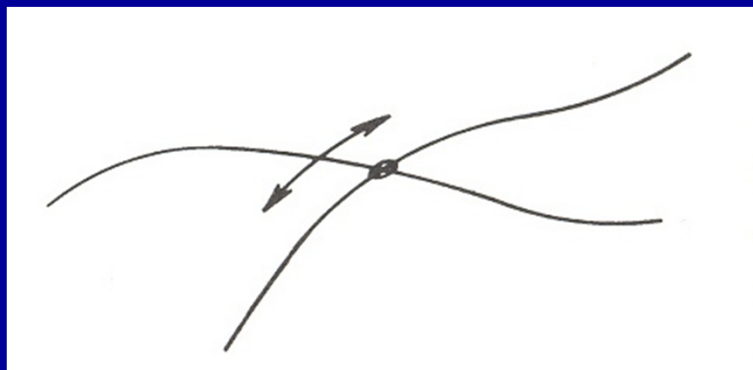
(d) *Ljuske*

Kupola

- kupole mogu biti i drugih oblika, npr. **konične**
- konična kupola je jednostruke zakrivljenosti no prenosi sile direktnim (membranskim) djelovanjem, slično kao kod kupola dvostruke zakrivljenosti
- sile u prstenima ne mijenjaju predznak

(d) *Ljuske*

- geometrija ljosaka može se generirati na različite načine
- zakrivljena ploha može se generirati pomicanjem jedne krivulje uzduž druge krivulje ili uzduž para krivulja
- na taj način mogu se generirati različiti oblici ljosaka

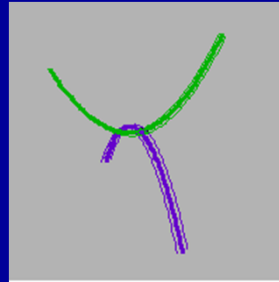
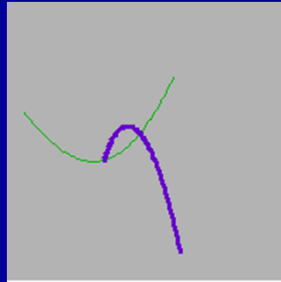
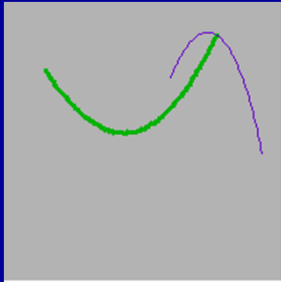


(d) *Ljuske*

- kada je "nepomična" krivulja direktrisa u horizontalnoj ravnini, a "pomična" krivulja generator u vertikalnoj ravnini, plohu se obično definira s generatorom kao imenicom i direktrisom kao pridjevom

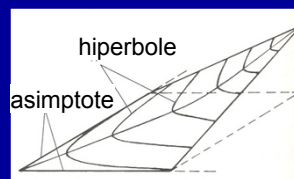
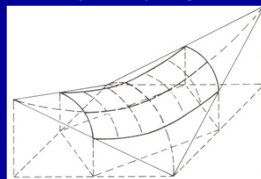
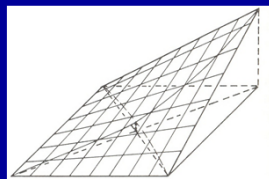
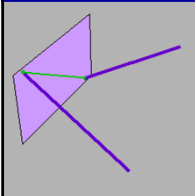
Hiperbolični paraboloid

- ploha koja se dobije pomicanjem parabole u vertikalnoj ravnini uzduž hiperbole u horizontalnoj ravnini

(d) *Ljuske*

Hiperbolični paraboloid

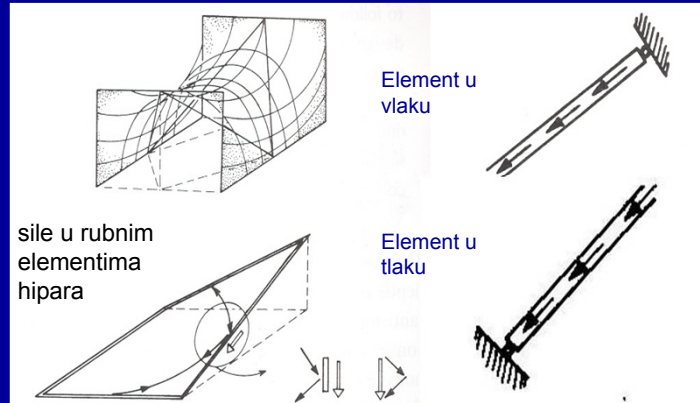
- vrsta ljuske vrlo pogodna za izradbu u betonu
- najjednostavniji način geometrijske definicije je kao ploha generirana pomicanjem pravca po dva pravca koji nisu u istoj ravnini
- geometrijska svojstva hipara:**
 - proizvoljna linija "paralelna" s granicom je pravac
 - hipar sadrži dva ortogonalna skupa pravaca nad pravokutnim tlocrtom i zato nije potrebna zakrivljena oplata
 - ploha je antiklastična (sedlasta)
 - vertikalna ravnina koja po dijagonali povezuje suprotne "donje" uglove siječe plohu po konveksnoj paraboli
 - druga dijagonala čini konkavnu parabolu
 - horizontalne ravnine sijeku plohu po hiperbolama koje se asimptotski približavaju donjim granicama



(d) *Ljuske*

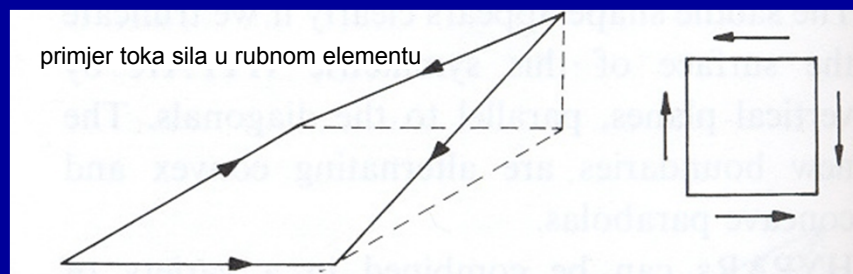
Hiperbolični paraboloid

- unutarnje sile hipara za jednoliko raspoređeno opterećenje daju se jednostavno proračunati
- Jedan skup parabola plohe su konveksne, tj. lukovi (tlak), a drugi skup konkavne parabole, tj. kabeli (vlak)
- u smjerovima paralelnim s dijagonalama ne postoje posmične sile; to su tzv. glavne osi

(d) *Ljuske*

Hiperbolični paraboloid

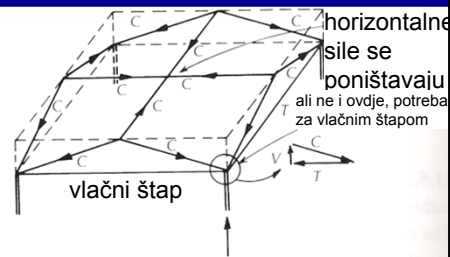
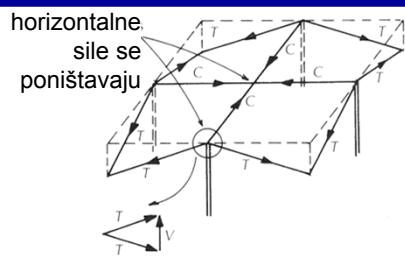
- na rubovima (granicama) sijeku se vlačne sile od konkavnih dijagonala i tlačne sile od konveksnih dijagonala s rezultantom u smjeru rubnog elementa
- ako je hipar prikladno oslonjen u rubnom elementu javljaju se samo uzdužne sile, vlačne, tlačne ili dijelom vlačne a dijelom tlačne, ovisno o usvojenom položaju rubnog elementa



(d) *Ljuske*

Hiperbolični paraboloid

- barem jedan kraj rubnog elementa mora se fiksirati i u horizontalnom smjeru
- optimalna dispozicija dobije se tako da se horizontalne komponente susjednih rubnih elementa međusobno poništavaju, čime se postiže da na stupove djeluju samo vertikalne sile
- uobičajena dispozicija hipara je sa konstruktivnom visinom (strelicom odnosno provjesom) od $\frac{1}{2}$ ukupne visine, a najmanja konstruktivna visina ne bi smjela biti manja od $\frac{1}{10}$ raspona



Učinak pridržanja na sile u rubnim elementima

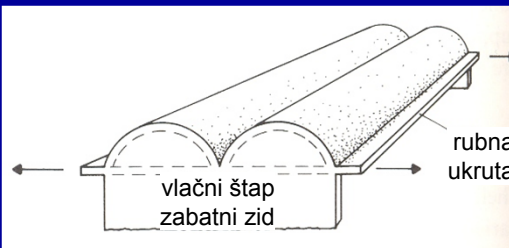
(d) *Ljuske*

Cilindrične ljuske

- generiramo ih pomicanjem krivulje paralelne samoj sebi uzduž pravca ili obrnuto pomicanjem pravca uzduž krivulje, što pokazuje da se radi o plohi jednostruke zakrivljenosti
- cilindrične ljuske zahtijevaju za oslanjanje krute zabatne zidove, da bi zadržale oblik i da se osigura membransko djelovanje
- slobodne rubove treba ojačati da se izbjegne lokalno izbočavanje i savijanje



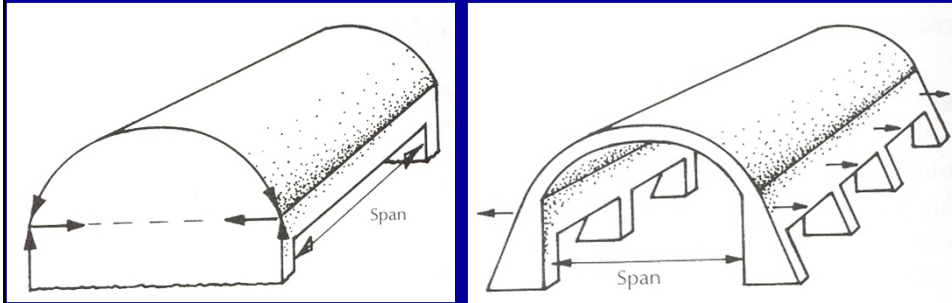
generiranje cilindrične ljuske



(d) *Ljuske*

Cilindrične ljuske

- cilindrična ljuska može izgledati slično svodu, ali je njeno ponašanje potpuno drugačije
- svod je ravninska struktura funikularnog oblika, koja nosi po širini s oslanjanjem po uzdužnim rubovima, a zabati nisu potrebni, a cilindrična ljuska nosi u smjeru duljine

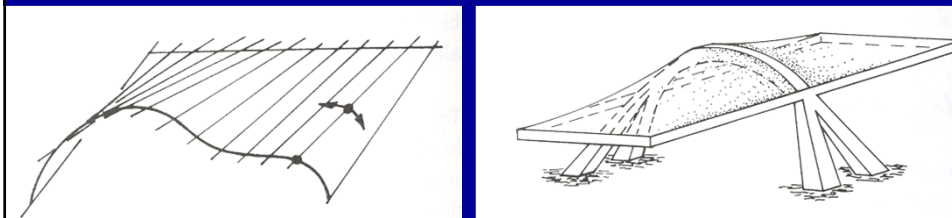


Razlika između cilindrične ljuske i svoda

(d) *Ljuske*

Konoidna ljuska

- formira se pomicanjem pravca na jednom kraju po krivulji a na drugom kraju po pravcu
- ove ljuske su vrlo učinkovite za konzolne konfiguracije jer konstruktivna visina raste od najmanje vrijednosti na slobodnom rubu do najveće vrijednosti na upetom rubu, gdje su i momenti savijanja najveći
- upeti kraj npr. zabaćni zid preuzima momente savijanja ljuske pa mora imati i krutost u ravnini i krutost na savijanje (bočnu krutost)

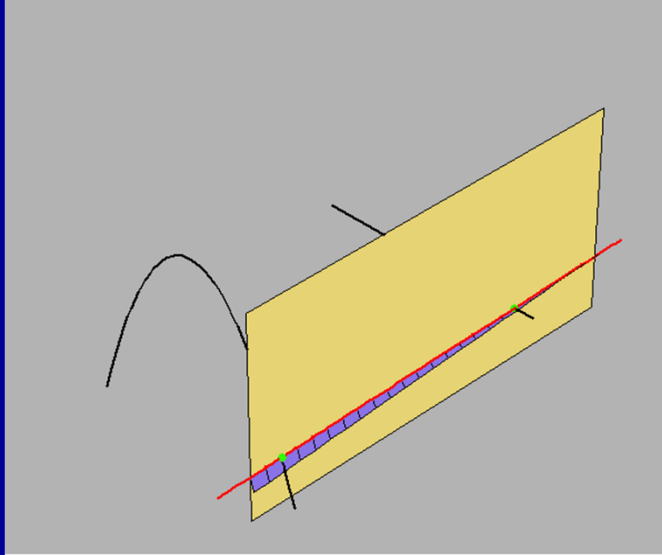


Generiranje konoidne ljuske

Konoidna ljuska kao konzola

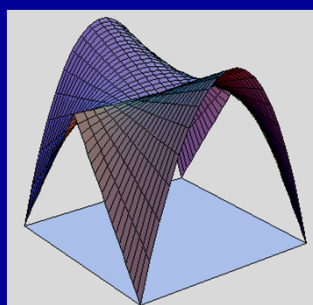
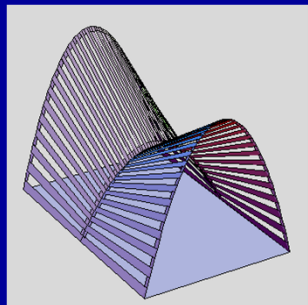
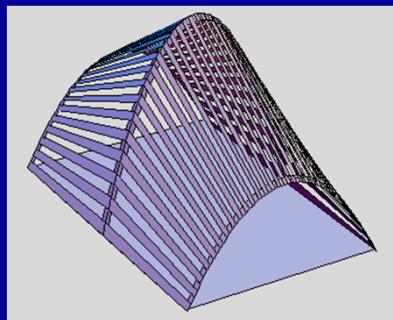
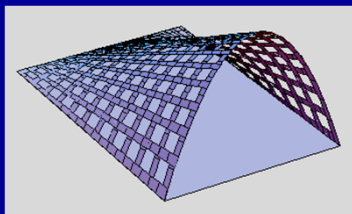
(d) *Ljuske*

Konoidna ljuska

(d) *Ljuske*

Konoidna ljuska

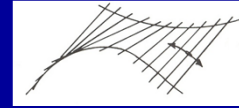
- primjeri natkrivanja konoidnom ljuskom



(d) *Ljuske*

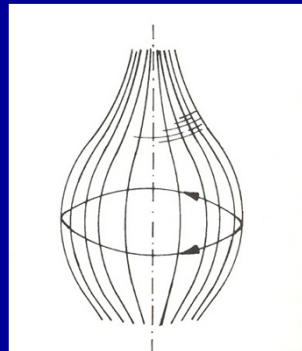
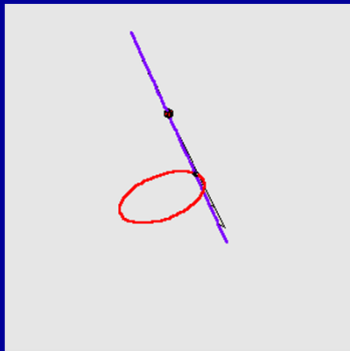
Pravčasta ploha

- generira se pomicanjem pravca preko dviju krivulja
- cilindrične i konoidne ljske su posebni slučajevi ovakvih ploha
- ove plohe mogu biti jednostruke i dvostruke zakrivljenosti (npr. hiperbolični paraboloid)



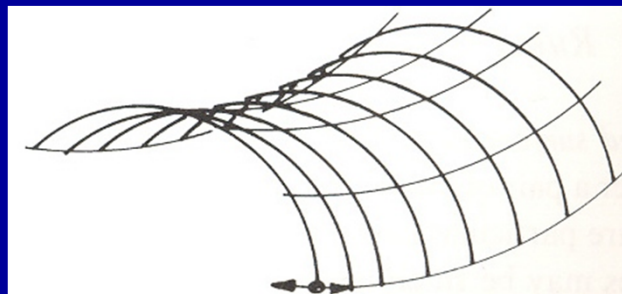
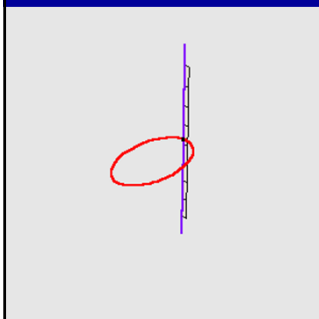
Rotacijske ljske

dobivaju se rotacijom krivulje oko kružnice, npr. sferne i konične ljske

(d) *Ljuske*

Translacijske ljske

- dobivaju se translacijom krivulje po drugoj krivulji
- cilindrične ljske su primjer translacijskih ljsaka s pravcem kao generatorom



(d) *Ljuske*

Primjer: natkrivanje kvadratnog prostora

MOGUĆNOST 1 – PRIMJENA REDUCIRANE SFERNE KUPOLE

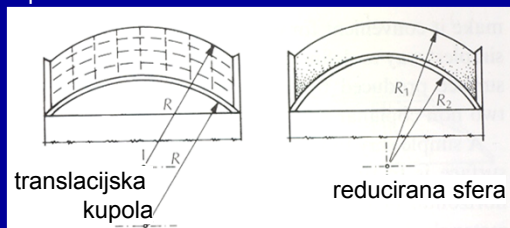
- primjena reducirane sferne kupole kojoj se vertikalnim ravninama rubovi prostora odrežu
- tako se nad rubovima dobivaju kružni lukovi

MOGUĆNOST 2 – GENERACIJA TRANSLACIJSKE KUPOLE

- translacijom kružnog luka po identičnom luku, okomitom na translirani luk, generira se kupola vrlo slična reduciranoj sfernoj kupoli

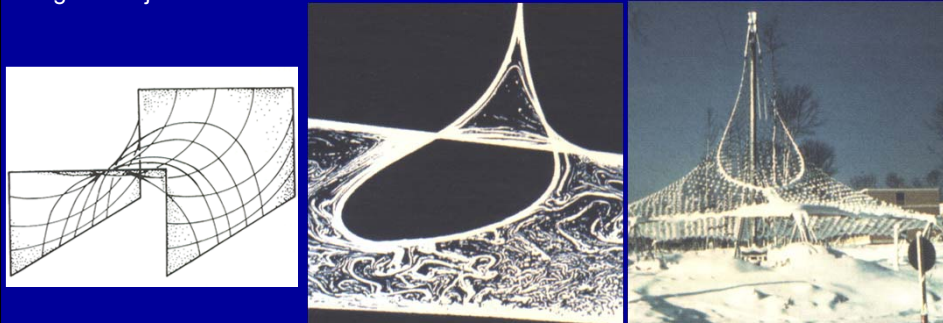
RAZLIKE – U RUBNIM LUKOVIMA:

- kod reducirane sfere polumjer tih lukova manji je od polumjera sfere, a u vertikalnoj projekciji ti polumjeri su koncentrični
- kod translacijske kupole polumjer rubnih lukova jednak je polumjeru bilo koje vertikalne ravnine paralelne s rubovima

(d) *Ljuske*

Ljuske oblika mjehura od sapunice

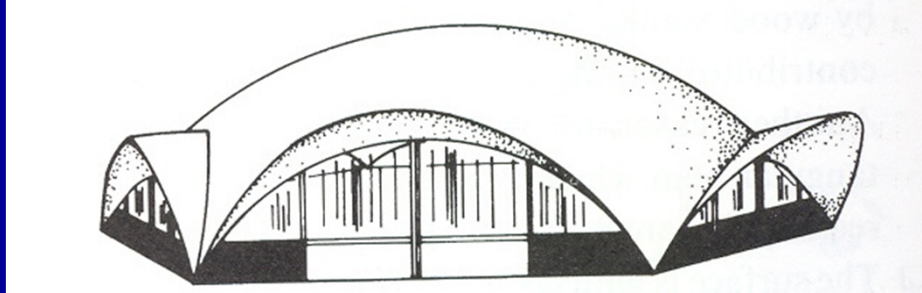
- imaju oblik koji bi se realizirao kad bi se žičani model granica prostora uronio u sapunicu
- ove plohe se nazivaju i minimalnim plohami, jer se njima ostvaruje najmanja površina ploha za zadanu granicu
- vlak u bilo kojem smjeru bilo kojeg elementa ovakve ljuske je konstantan
- ove plohe prikladne su za složene granice prostora, a mogu se modelirati i na računalu s dodatnom prednosti mogućnosti modifikacije plohe za proizvoljna funkcionalna ograničenja



(d) *Ljuske*

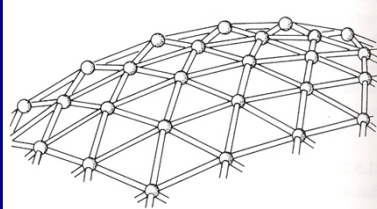
Ljuske slobodnih oblika

- plohe koje se ne mogu prikazati kao matematske funkcije
- mogu se oblikovati temeljem fizikalnih modela ili generirati na računalu primjenom optimizacijskih postupaka za proizvoljna ograničenja, kao što su granice prostora, mjesta oslanjanja, traženi gabariti i sl.

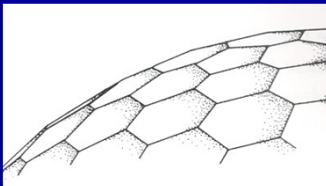
(d) *Ljuske*

Pločaste i štapne ljuske

- zamjena glatke plohe bilo koje ljuske sa:
 - ili mrežom zglobno spojenih štapnih elemenata (**štapna ljuska**)



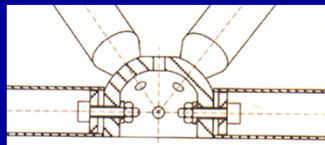
- ili mrežom zglobno spojenih ploča (**pločasta ljuska**)



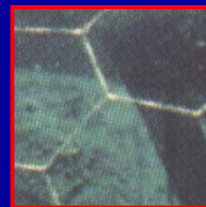
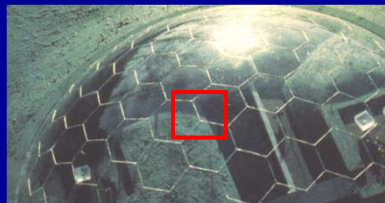
(d) *Ljuske*

Pločaste i štapne ljuske

- geometrijsku krutost zakrivljene mreže zglobno spojenih štapnih elemenata (štapne ljuske) može se ostvariti samo ako mrežu čine trokuti



- geometrijsku krutost zglobno spojenih ploča (pločaste ljuske) realizira se tako da se u pojedinom čvoru sijeku barem tri ruba susjednih ploča

(d) *Ljuske*

Pločaste i štapne ljuske

- ne treba zaboraviti da elementi štapnih ljusaka preuzimaju samo normalne sile, a elementi pločastih ljusaka djeluju kao membrane što uključuje i posmične sile u ravnini ploče
- štapne ljuske od čeličnih elemenata su mnogo tanje od betonskih ljusaka. Osnovni mehanizmi odkazivanja nosivosti su razne vrste izvijanja odnosno izbočavanja (problem stabilnosti vitkih elemenata), izvijanje štapova, lokalno snap-through izbočavanje ili globalno izbočavanje
- kod velikih raspona zakrivljenost je često vrlo mala. Zbog netočnosti izvedbe može doći do lokalne nestabilnosti, što se obično izbjegava primjenom dvoslojnih konfiguracija

(d) *Ljuske*

Ojačane kupole (braced domes)

- danas najčešća vrsta kupola velikih raspona
- ukupna težina im je od 40–80 kg/m², zajedno s pokrovom
- postoji više geometrijskih oblika takovih kupola koje se razlikuju po diskretizaciji plohe kupole
- rebraste ljuske nastaju formiranjem plohe od mreže meridijalnih rebara i prstenova



Rebrasta kupola

